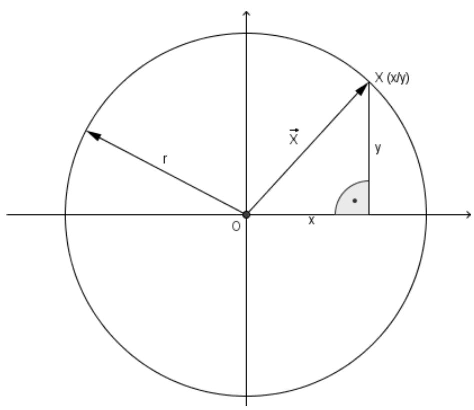
Der Kreis

DEFINITION der Kreislinie

Die Menge aller Punkte X einer Ebene, die von einem festen Punkt M (Mittelpunkt des Kreises) den konstanten Abstand r (Radius des Kreises) haben, liegt auf einer Kreislinie k.

Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems



Nach der Definition des Kreises gilt, dass die Länge des Ortsvektors $\overrightarrow{OX}$ zu jedem Punkt X (x/y) der Kreislinie gleich r (Radius) ist.

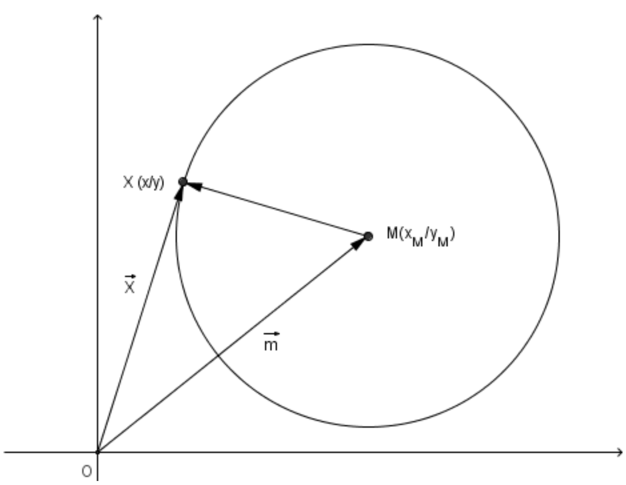
Herleitung der Gleichung für den Kreis in Mittelpunktslage und Radius r:

$$\left|\overrightarrow{OX}\right| = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$\boldsymbol{k: x^2 + y^2 = r^2}$$

Kreis mit beliebigem Mittelpunkt M (x_M/y_M)



Nach der Definition des Kreises gilt, dass die Länge des Vektors $\overrightarrow{MX}$ (für jeden Punkt der Kreislinie) gleich r ist.

Herleitung der Gleichung für den Kreis beliebigen Mittelpunkt M (x_M/y_M) und Radius r:

$$\left|\overrightarrow{MX}\right| = r$$

$$\overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix} x - x_M \\ y - y_M \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{MX}\right| = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}$$

$$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r$$

$$\boldsymbol{k: (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2}$$ **allgemeine Kreisgleichung**

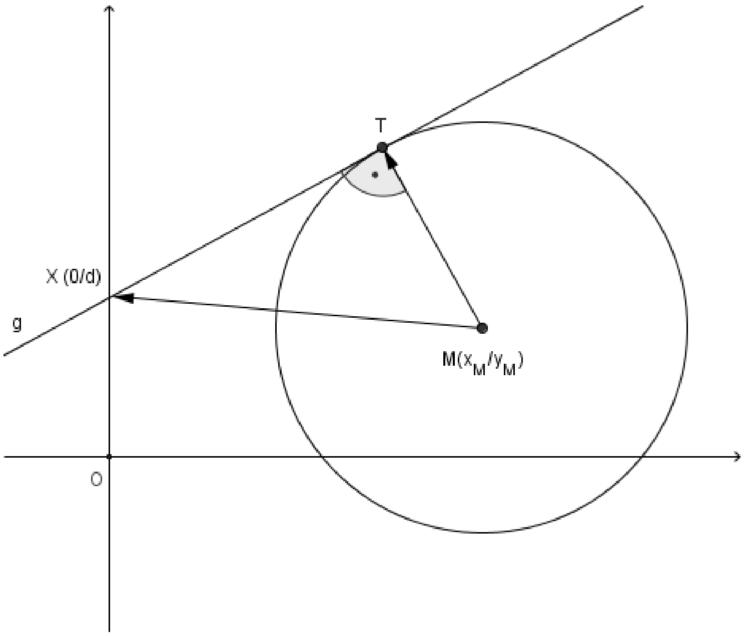
Lagebeziehung der Punkte P, Q und R bezüglich eines Kreises

Überlege dir selbst wie die Punkte liegen können, fertige selbst eine Skizze an und überlege dir in welchem Verhältnis der Betrag des Vektors vom Mittelpunkt zu dem Punkt und der Radius stehen.

Lagebeziehung Kreis – Gerade

Was ist eine Sekante, eine Passante und eine Tangente?
Fertige jeweils eine Skizze an und bestimme die Anzahl der Schnittpunkte mit dem Kreis!

Berührbedingung:



Auch mit der Berührbedingung kann man feststellen, ob die Gerade g: y = kx + d den Kreis k: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ berührt. Sie gibt den Zusammenhang zwischen den Bestimmungsstücken der Geraden (k und d) und denen des Kreises (M und r) an.

Ist die Gerade g Tangente des Kreises, so gilt:
Die Normalprojektion des Vektors $\overrightarrow{MX}$ auf den Vektor $\overrightarrow{MT}$ ist gleich dem Radius r:

$$\frac{\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{MT}}{|\overrightarrow{MT}|} = r$$

$$\overrightarrow{MX} \cdot \frac{\overrightarrow{MT}}{|\overrightarrow{MT}|} = r$$

$$\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{MT_0} = r$$

$$\overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix} 0 - x_M \\ d - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_M \\ d - y_M \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MT}$ ist ein Normalvektor der Geraden g: y = kx + d. Eine Gerade mit Anstieg ka hat als Richtungsvektor $\vec{a} = \binom{1}{k}$. Der zugehörige Normalvektor ist daher $\binom{k}{-1}$ und $\binom{-k}{1}$.

Daher erhält man $\overrightarrow{MT_0} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \binom{-k}{1}$
Setzt man nun in $\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{MT_0} = r$ ein, so ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} -x_M \\ d - y_M \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = r$$

$$\begin{pmatrix} -x_M \\ d - y_M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \sqrt{k^2+1}$$

$$x_M \cdot k + d - y_M = r \cdot \sqrt{k^2+1}$$

$$\boldsymbol{(x_M \cdot k + d - y_M)^2 = r^2 \cdot (k^2 + 1)}$$ **Berührbedingung**

Für einen Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung folgt daraus:

$$d^2 = r^2 * (k^2 + 1)$$

Gleichung der Tangente im Punkt T eines Kreises

1. allgemeiner Kreis mit Mittelpunkt M (xM/yM) und Radius r
   $(x_T - x_M)(x - x_M) + (y_T - y_M)(y - y_M) = r^2$
2. Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung
   $x_T x + y_T y = r^2$